Construirea funcţiei logaritmice şi a funcţiei exponenţiale pe baza calculului diferenţial şi integral

Prof. Miu Simona, Colegiul Economic "Gheorghe Chițu", Craiova

În cadrul lecţiilor de sinteză, din perioada de recapitulare şi sistematizare (clasa a XII-a) este util să arătăm elevilor că analiza matematică permite construirea şi studiul unor funcţii elementare învăţate în clasele IX-X.

I) Funcţia logaritmică neperiană

Fie funcţiile f, F : $R_+^* \to R_+^*$, $f(x) = x^r, r\epsilon Q$ şi F(x)=$\int_a^x t^r dt$ unde $r\epsilon Q\backslash\{-1\}$, a$> 0$

Pentru r=-1 definim functia $\varphi: R_+^* \to R_+^*$ φ(x)=$\frac{1}{x}$, continuă şi deci integrabilă pe domeniu de definiţie.

Definiţie: Se numeşte ***funcţie logaritmică neperiană*** primitiva funcţiei φ:$R_+^* \to R_+^*$, φ(x)=$\frac{1}{x}$ şi anume: L(x)=$\int_1^x \frac{dt}{t}$

Proprietăţi:

1. L(1)=0

2. Functia L are derivată pozitivă în fiecare punct al domeniului de definitie R_+^*. Aplicăm teorema creşterilor finite (∀) $x_1,x_2\epsilon R_+$, $x_1 < x_2, \exists\xi$, ξϵ[x_1,x_2] a.i. L(x_2)-L(x_1)=(x_2-x_1)L'(ξ). Cum L'(ξ)>0 si x_2-x_1>0 => L(x_2)>L(x_1) si prin urmre functia L este strict crescatoare pe R_+^*.

Rezultă: a>1=>L(a)>0, 0<a<1=>L(a)<0

3. L este un morfism între grupurile (R_+^*, ·) şi(R,+)

Fie μ o funcţie derivabilă pe R cu valori in R_+^*. [L(μ(x))]'=μ'(x)·L'(μ(x))=$\frac{\mu'}{\mu}$.În particular dacă μ(x)=kx avem [L(kx)]'=$\frac{k}{kx}$=$\frac{1}{x}$=[L(x)]'→L(kx)=L(x)+c

Pentru a putea determina constanta c, îi dăm x=1 →L(k)=L(1)+c => c=L(k) si deci:

L(kx)=L(k)+L(x) pentru ∀ k,x>0=> L(ab)=L(a)+L(b)

Consecinţe : Pentru b$\in R_+^*$ avem b$\frac{1}{b}$ =1 deci L(b·$\frac{1}{b}$)=L(b)+L($\frac{1}{b}$)=L(1)=0→ L(b)+L($\frac{1}{b}$)=0 => L($\frac{1}{b}$)=-L(b) → pentru $\frac{a}{b}$=a·$\frac{1}{b}$ =>L($\frac{a}{b}$)=L(a·$\frac{1}{b}$)=L(a)+L($\frac{1}{b}$)=L(a)-L(b). Prin recurenţă se arată uşor că:

L($a_1 \cdot a_2 \cdot ...... a_n$)=L($a_1$)+L($a_2$)+………+L($a_n$)=> L($a^n$)=L(a*a……….a)=nL(a) şi

L(a^{-n})= -n·L(a)

L(a)=rL(a) pentru r=$\frac{p}{q}$ $\in$Q Deci y=a^r<=> y^q=a^p cu p, qϵZ şi =>

L(y^q)=L(a^p)<=>qL(y)=pL(a) => L(y)=$\frac{p}{q}$L(a)=rL(a)

4. L este o aplicaţie bijectivă (continuă şi strict monotonă) => L este un izomorfism al grupurilor (R_+^*, ·) şi(R,+).

Consecinţe : a). ($\forall$)a,b$\in R_+^*$ din a=b<=>L(a)=L(b) .(injectivitatea funcţiei logaritmice)

b). Funcţia L fiind bijectivă există şi este unică soluţia ecuaţiei L(x)=1. Se notează cu e şi se numeşte baza logartimului neperian. L(e)=1.

c). Se poate arăta că numărul e este numar iraţional, 2<e<3 cu valoarea aproximativa 2,7182818285

d). Logaritmul neperian se mai notează şi ln, adica L(x)=lnx

5. $\lim\limits_{x\to\infty} L(x)=\int_1^\infty \frac{dt}{t}=\infty$;$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} L(\frac{1}{x})=-L(x)=-\infty$; $\forall r\in Q, \lim\limits_{x\to\infty}\frac{L(x)}{x^r}=0$

6. L admite x=0 asimptotă vertical, dar nu admite asymptote orizontale sau oblice.

Demonstraţie: Fie $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{L(x)}{x}=m$. Ştim că $\forall$xϵ(1,∞) 1>$\frac{1}{x}$, deci $\int_1^x dt > \int_1^x \frac{dt}{t}$=> L(x)<x.

În particular $\forall$ xϵR_+ , L($\sqrt{x}$)< $\sqrt{x}$, $\frac{1}{2}$L(x)< $\sqrt{x}$; $\frac{L(x)}{x}$<$\frac{2\sqrt{x}}{x}$=$\frac{2}{\sqrt{x}}$.

Cum $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0$=>$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{L(x)}{x}=0 \Rightarrow m=0$. Totodată $\lim\limits_{x\to\infty}L(x)=\infty$=>Curba nu admite asimptote pentru ramura de la ∞.

7. Tangenta la grafic în A(1,0), y=x-1 este paralelă cu prima bisectoare şi tangenta în B(e,1), y=$\frac{x}{e}$ trece prin originea sistemului de axe xoy.

Ne punem problema dacă există şi alte izomorfisme de la (R_+^*, ·) la (R,+).

Relaţia k·L(x·y)=k·$[L(x)+L(y)]$=k·L(x)+k·L(y) ne conduce la definirea unor funcţii logaritmice cu alte baze decât nr.e. Astfel $\forall k\in R^*$ funcţia $g: R_+ \to R$, g(x)=k·L(x) este un izomorfism al grupurilor(R_+^*, ·) şi (R,+). În baza izomorfismului de grupuri se poate afirma că există un singur număr real pozitiv $a\neq 0$ şi $a\neq 1$ care pentru un $k\in R$, nenul care verifică relaţia $k\cdot L(a)=1 \Rightarrow k=\frac{1}{L(a)} \Rightarrow g(x)=\frac{L(x)}{L(a)}$ şi este numită funcţia logaritmică de bază a şi se notează

$$\log_a x=\frac{L(x)}{L(a)}$$

Ea are toate proprietăţile funcţiei logaritmice demonstrate în manualul de clasa a –X-a.

II) Funcţia exponenţială

Funcţia L: $R_+^* \to R$, $L(x)=\int_1^x \frac{dt}{t}$ este bijectivă şi ca urmare admite funcţie inversă.

Definiţie: Inversa funcţiei logaritmice o vom numi <u>funcţie exponenţială</u> $E: R\to R_+^*$ $=L^{-1}(x)=e^x$

Proprietăţi:

1. $E(0)=1$, $E(1)=e$

2. Funcţia E fiind funcţie inversă a unei funcţii continue şi strict crescătoare, este şi ea însăşi continuă şi strict crescătoare, adică $\forall\, x_1,x_2 \in R$, $x_1<x_2 \Rightarrow e^{x_1}<e^{x_2}$

3. Dacă $-\infty < x < 0 \Rightarrow 0 < e^x < 1$; $0 < x < \infty \Rightarrow 1 < e^x < \infty$

4. E este un izomorfism de la $(R,+)$ la $(R_+^*, \cdot)$

5. $E(a)=E(a-b+b)=E(a-b)\cdot E(b) \Rightarrow \frac{E(a)}{E(b)}=E(a-b)$

6. Fie $r\in Q$ şi $y\in R_+$. Ştim că $L(y^r)=rL(y)$. Punem $y=E(x)$ şi atunci $L(E(x)^r)=rL(E(x))=r\cdot x=L(E(rx))$ şi $E(r\cdot x)=(E(x))^r$; $E(r)=E(r\cdot 1)=(E(1))^r \Rightarrow E(1)=e$.

7. $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$; $\lim\limits_{x\to\infty} e^x=\infty$; $\forall r\in Q, \lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^r}=\infty$

8. $E'(x)=\frac{1}{L'(y)}=\frac{1}{\frac{1}{y}}=y=e^x$

9. Tangenta în B(0,1) are ecuaţia $y=x+1$, este paralelă cu prima bisectoare $y=x$.

Tangenta în M(1,e) are ecuaţia $y=ex$ şi trece prin origine.

Deoarece funcţia $\log_a$ pentru $\forall a \rhd 0$ si a $\neq 1$ este un izomorfism al grupurilor (R_+^*, ·) şi(R,+).

vom avea şi aplicaţia inversă h:R$\to R_+^*$ pentru $\forall a \rhd 0$ si a $\neq 1$, h(x)= a^x

$\forall x \in R, y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y; y \rhd 0$ si $\forall x \in R, a^x = e^{xL(a)}$

$(a^x)' = (e^{xL(a)})' = L(a)e^{xL(a)} = L(a)a^x$

În concluzie construirea funcţiei logaritmice şi a funcţiei exponenţiale pe baza calculului diferenţial şi integral apare firească. Stabilirea izomorfismului (R_+^*, ·)$\cong$ (R, +)este esenţială

Ne punem întrebarea dacă funcţia logaritmică este singura funcţie care verifică ecuaţia funcţională $f(xy) = f(x) + f(y)$ **(*)**

Vom arăta că nu există o altă funcţie strict crescătoare pe R_+^* în afara funcţiei logaritm care să satisfacă condiţia (*) .

Pentru a demonstra acest lucru în (*) facem y=1 =>f(x) =f(x)+f(1) unde f(1) =0

Fie x_1 ,x_2 …………x_n $\in R_+^*$ $\Rightarrow$ f($x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$) =f($x_1$)+f($x_2$)…….+f($x_n$) pentru $x_1=x_2=\ldots=x_n$ avem f (x^n)=nf(x) (**)

În egalitatea (**) înlocuim x prin $\sqrt[n]{x}$ şi avem:f(x) =nf($\sqrt[n]{x}$)$\Rightarrow f(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} f(x)$

Dacă $r = \frac{p}{q} \in Q_+$ $\quad f(x^{\frac{p}{q}}) = f(\sqrt[q]{x^p}) = \frac{1}{q} f(x^p) = \frac{p}{q} f(x)$

În (*) punem y=$\frac{1}{x}$ şi avem: $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = f(1) = 0, \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$ Analog

$f(x^{-r}) = f((x^r)^{-1}) = -f(x^r) = -rf(x)$. pentru x$\in Q$ f(x^r)=$rf(x)$

Fie α un număr iraţional şi două şiruri de numere raţionale (α_n) şi (β_n) astfel încât:

$$\alpha_1 \le \alpha_2 \le \ldots\ldots\ldots\ldots \le \alpha_n \ldots\ldots\ldots \le \beta_n \le \ldots\ldots \le \beta_2 \le \beta_1 \text{ cu } \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n = \alpha$$

(Spre exemplu şirul aproximărilor prin lipsă şi respectiv prin adaos a numărului α)

În baza monotoniei funcţiei f avem:

$$f(x^{\alpha_n}) \leq f(x^{\alpha}) \leq f(x^{\beta_n})$$

Dar $f(x^{\alpha_n}) = \alpha_n f(x)$ şi $f(x^{\beta_n}) = \beta_n f(x) \Rightarrow$ prin trecerea la limită $f(x^{\alpha}) = \alpha f(x)$ şi unicitatea lui x^{α}. Funcţia f fiind strict crescătoare nu poate fi identic nulă deci există un x=c astfel încât f(c)$\neq$0. Dacă luăm x=c şi $\alpha = \frac{1}{f(c)}$ => $f(c^{\frac{1}{f(c)}}) = \frac{1}{f(c)} \cdot f(c) = 1$. Notând $c^{f(c)}$ =a, avem: f(a) =1 şi f(a^y) =yf(a) =y unde y este un număr real arbitrar. Luând x=a^y sau y=$\log_a x$ obţinem:f(x) =$\log_a x$, deci

y= $\log_a x$ este singura funcţie care îndeplineşte condiţiile iniţiale, ceea ce trebuia determinat.

Două funcţii monotone care satisfac ecuaţia funcţională (*) pot să difere prin valoare bazei logaritmului a.

Din cele arătate mai sus se poate concluziona că prezentând în acest mod cele două funcţii folosind proprietatea de izomorfism, vom dezvălui elevilor o dată în plus frumuseţea matematicii.

Bibliografie:

1.S.Chiriţă, *Probleme de matematici superioare,*Editura Didactică şi Pedagogică-Bucureşti,1989

2.O.Stănăşilă, *Analiză matematică,* Editura Didactică şi Pedagogică-Bucureşti,1987

3.Ion Gh.Şabac, *Matematici speciale,* Editura Didactică şi Pedagogică-Bucureşti,1981